

К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ



Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

2012

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

- 10 вариантов заданий
- Ответы и решения
- Критерии оценок
- Бланки ответов

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

10 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

*Издательство
«ЭКЗАМЕН»*

МОСКВА
2015

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 ЕГЭ 2015. Математика. Типовые тестовые задания / И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, В. С. Панферов, С. Е. Посицельский, А. В. Семенов, М. А. Семенова, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль, И. В. Яценко; под ред. **И. В. Яценко**. — М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2015. — 56 с. (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания»)

ISBN 978-5-377-08330-6 (Издательство «Экзамен»)

ISBN 978-5-4439-0171-8 (МЦНМО)

Типовые тестовые задания по математике содержат 10 вариантов комплектов заданий, составленных с учетом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена в 2015 году. Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2015 г. по математике, степени трудности заданий.

В состав авторского коллектива входят специалисты, имеющие большой опыт работы в школе и вузе и принимающие участие в разработке тестовых заданий для ЕГЭ.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов и приводятся решения всех заданий одного из вариантов. Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и абитуриентами — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Справочное издание

**Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Панферов В. С., Посицельский С. Е.,
Семенов А. В., Семенова М. А., Сергеев И. Н., Смирнов В. А.,
Шестаков С. А., Шноль Д. Э., Яценко И. В.**

ЕГЭ. МАТЕМАТИКА ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство «**ЭКЗАМЕН**»

Гигиенический сертификат № РОСС RU. АЕ51. Н 16582 от 08.04.2014 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*. Редактор *И. М. Бокова*. Технический редактор *Л. В. Павлова*.
Корректор *Л. К. Корнилова*. Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*. Компьютерная верстка *Е. Ю. Лысова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz; по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Формат 60×90/8. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 2,69.

Усл. печ. л. 7. Тираж 50 000 экз. Заказ 2935.

Общероссийский классификатор продукции

ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами

в ООО «Красногорская типография». 143405, Московская область, г. Красногорск, Коммунальный кв., д. 2. www.ktprint.ru

ISBN 978-5-377-08330-6 (Издательство «Экзамен»)

ISBN 978-5-4439-0171-8 (МЦНМО)

© Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Панферов В. С.,
Посицельский С. Е., Семенов А. В., Семенова М. А.,
Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Шестаков С. А.,
Шноль Д. Э., Яценко И. В., 2015
© Издательство «**ЭКЗАМЕН**», 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Инструкция по выполнению работы	4
Вариант 1	5
Часть 1	5
Часть 2	7
Вариант 2	10
Часть 1	10
Часть 2	12
Вариант 3	14
Часть 1	14
Часть 2	16
Вариант 4	18
Часть 1	18
Часть 2	20
Вариант 5	22
Часть 1	22
Часть 2	24
Вариант 6	26
Часть 1	26
Часть 2	28
Вариант 7	30
Часть 1	30
Часть 2	32
Вариант 8	34
Часть 1	34
Часть 2	36
Вариант 9	38
Часть 1	38
Часть 2	40
Вариант 10	43
Часть 1	43
Часть 2	45
Ответы	47
Вариант 1	47
Вариант 2	47
Вариант 3	47
Вариант 4	48
Вариант 5	48
Вариант 6	48
Вариант 7	49
Вариант 8	49
Вариант 9	49
Вариант 10	50
Решение заданий	51
Вариант 1. Часть 2	51

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 9 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 5 заданий с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–14 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 15–21 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

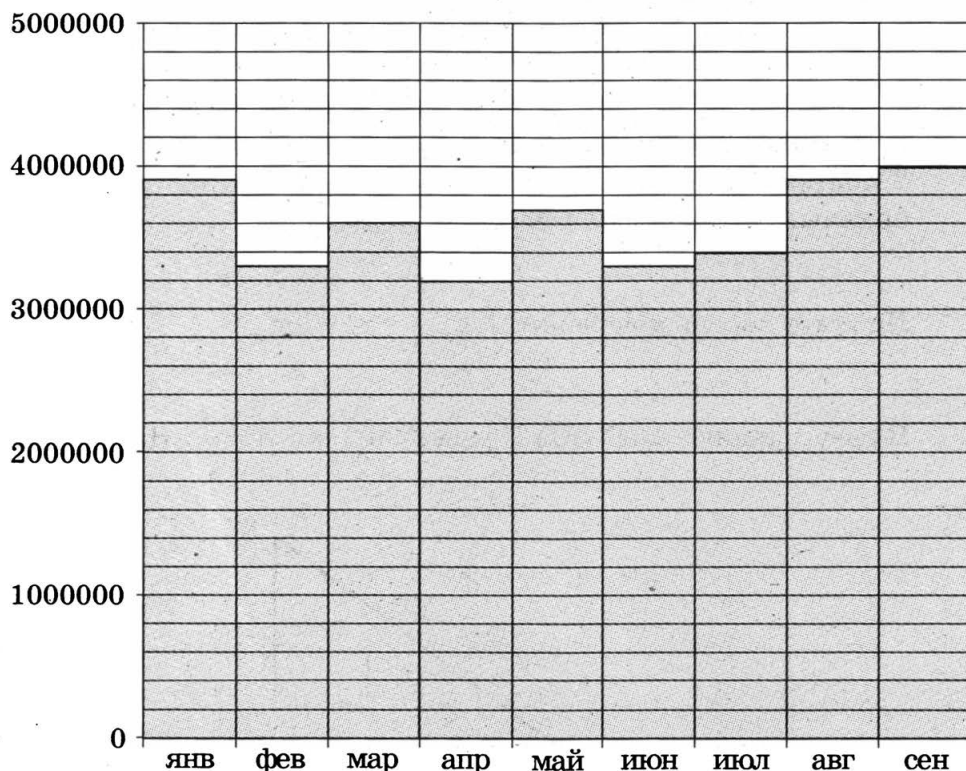
Желаем успеха!

ВАРИАНТ 1

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Система навигации, встроенная в спинку самолётного кресла, информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 36 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.
2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.

 1 2

3

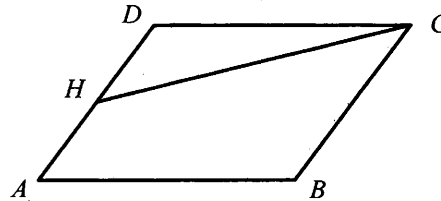
3. В таблице указаны цены (в рублях) на некоторые продукты питания в трёх городах России (по данным на май 2014 года).

Наименование продукта	Архангельск	Ростов-на-Дону	Пенза
Говядина (1 кг)	282	237	247
Подсолнечное масло (1 л)	75	66	56
Молоко (1 л)	76	58	54
Сыр (1 кг)	276	317	284
Рис (1 кг)	52	42	40
Картофель (1 кг)	36	39	24

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешёвым следующий набор продуктов: 2 кг говядины, 1 л подсолнечного масла, 3 кг картофеля. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

4

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $AHCB$.



5

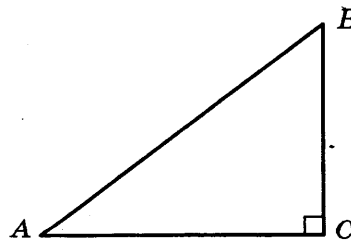
5. В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 2 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

6

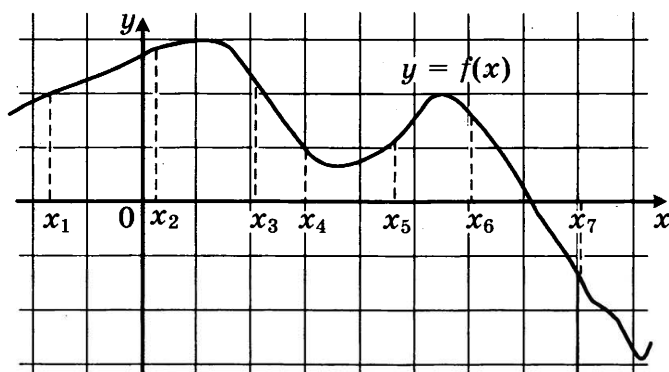
6. Найдите корень уравнения $\log_6(8-x) = \log_{36} 9$.

7

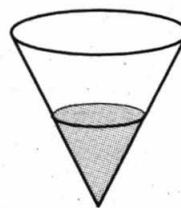
7. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\sin A = \frac{3}{5}$. Найдите $\cos B$.



8. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

 8


9. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рис.). Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?

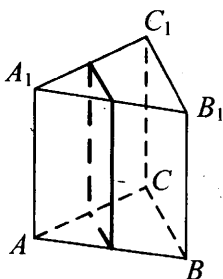

 9

Часть 2

10. Найдите $4 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,5$.
11. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.
12. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны оснований равны 1, боковые рёбра равны 11. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AC , A_1B_1 и A_1C_1 .

 10

 11

 12


13

13. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?

14

14. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 16$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

16

16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

17

17. Решите неравенство:

$$\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right)$$

18

18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

19. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

 19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

 20

21. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящихся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

 21

ВАРИАНТ 2

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

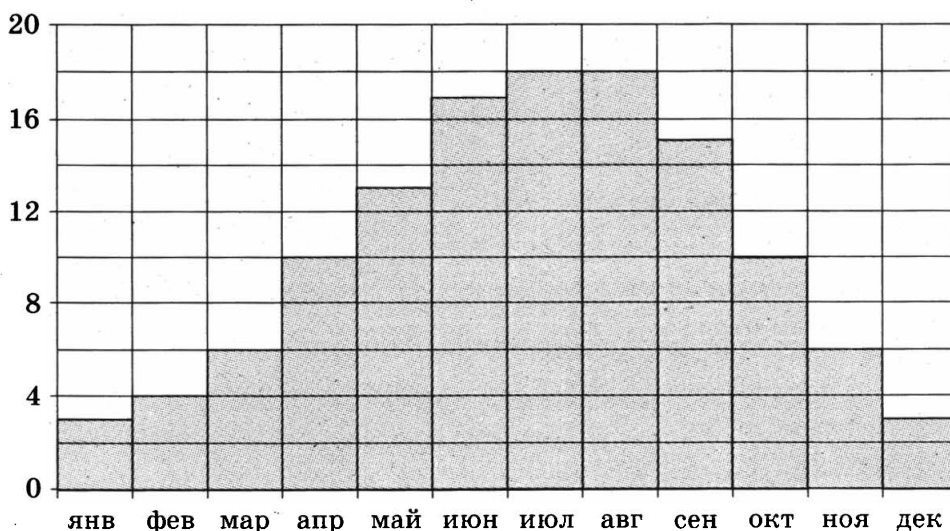
Часть 1

1

1. В спортивном лагере по настольному теннису каждый день ломается или теряется 8 теннисных шариков. Лагерная смена длится 18 дней. Шарик продают упаковками по 10 штук. Какое наименьшее количество упаковок шариков нужно купить на одну лагерную смену?

2

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Париже за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 2009 году, когда среднемесячная температура была равна 10 градусам Цельсия.



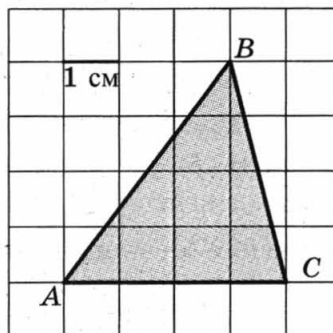
3

3. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки.
А	300 руб.	Нет	14 руб.
Б	Бесплатно	15 мин. — 225 руб.	17 руб.
В	120 руб.	20 мин. — 350 руб.	16 руб.

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

4. Найдите площадь треугольника ABC . Размер каждой клетки 1 см \times 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

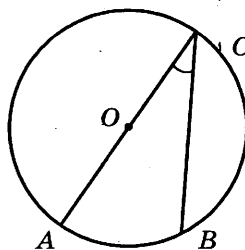
5. Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

 5

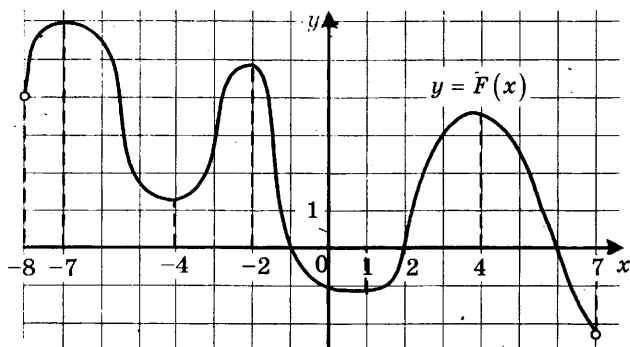
6. Найдите корень уравнения $\log_4(x+7) = 2$.

 6

7. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{2}{9}$ окружности. Ответ дайте в градусах.


 7

8. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 5]$.

 8


9

9. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 98 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 7 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Часть 2

10

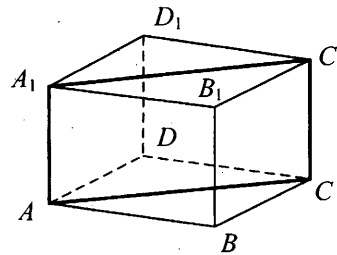
10. Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 2}$.

11

11. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 22$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 27,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

12

12. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 равно 8, а диагональ BD_1 равна 17. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точки A , A_1 и C .



13

13. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{27 + 6x - x^2}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $7^{x^2-2x} + 7^{x^2-2x-1} = 56$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.
16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковые рёбра равны 2, а стороны основания — 1,
 а) Докажите, что плоскость, проходящая через вершину S и середины рёбер AF и CD перпендикулярна плоскости основания.
 б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF .
17. Решите неравенство $\log_{x^3-9x^2+27x-27}(9-x) \geq 0$.
18. Противоположные стороны AD и BC четырёхугольника $ABCD$ параллельны. Через вершины B и D проведены параллельные прямые, пересекающие диагональ AC в точках M и N соответственно. Оказалось, что $AM = MN = NC$.
 а) Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.
 б) Найдите отношение площади четырёхугольника $BMDN$ к площади параллелограмма $ABCD$.
19. 1 января 2015 года Василий Михайлович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Василий Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Василий Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 137,5 тыс. рублей?
20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение $\frac{2(k+1)\cos t - k}{\sin t + \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
21. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3825.
 а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
 б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
 в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

15

16

17

18

19

20

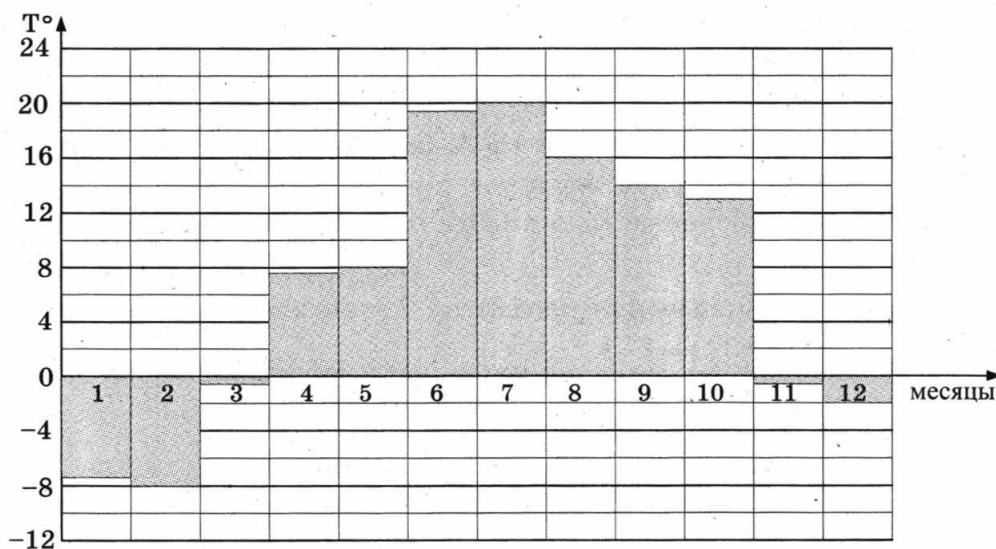
21

ВАРИАНТ 3

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Тетрадь стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 950 рублей после понижения цены на 25%?
2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разницу средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1999 году в Санкт-Петербурге. Ответ дайте в градусах Цельсия.



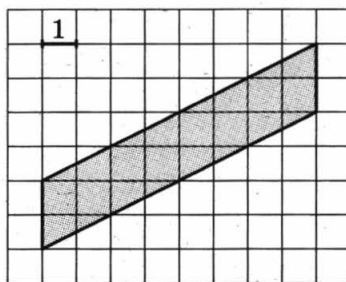
3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести пиджак ценой 9450 руб., футболку ценой

800 руб. и галстук ценой 900 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

1. Б. купит все три товара сразу.
2. Б. купит сначала пиджак и футболку, а потом галстук со скидкой.
3. Б. купит сначала пиджак и галстук, а потом футболку со скидкой.

В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

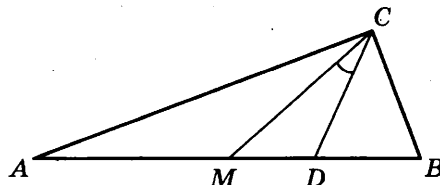
4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



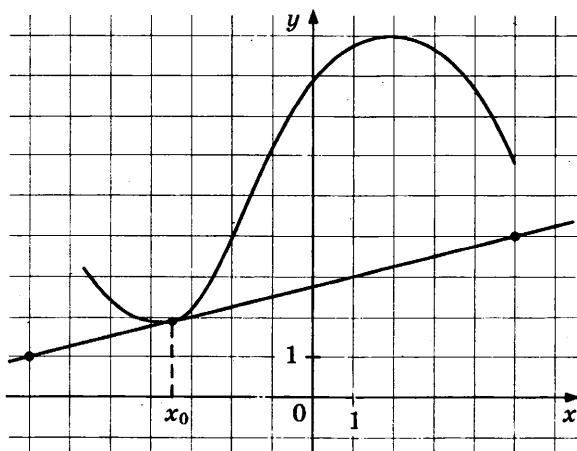
5. В группе туристов 5 человек, в том числе турист Д. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу Д. выпадет по жребию идти в село?

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{25 + 3x} = 4$.

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 69° и 21° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

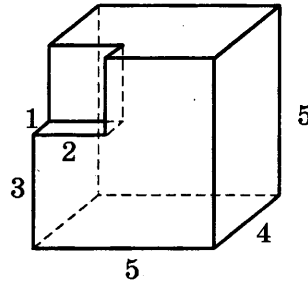


8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

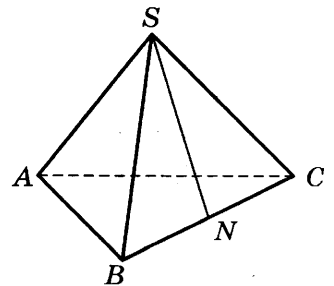
10. Найдите значение выражения $-20 \operatorname{tg} 52^\circ \cdot \operatorname{tg} 142^\circ$.

11

11. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50 В? Ответ выразите в омах.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка N — середина ребра BC , S — вершина. Известно, что $SN = 6$, а площадь боковой поверхности равна 72. Найдите длину отрезка AB .



13

13. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она меньше 60 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 17$ на отрезке $[-1; 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 \cos^2 x - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

15

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 .

16

17. Решите неравенство $2^{2x-1} - 7 \cdot 2^{x-1} + 5 \leq 0$.

17

18. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC , причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O .

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC .

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC , если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.

18

19. 31 декабря 2014 года Никита взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Никита переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 2 073 600 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 3 513 600 рублей, то за 2 года. Под какой процент Никита взял деньги в банке?

19

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

20

21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 672 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

21

ВАРИАНТ 4

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

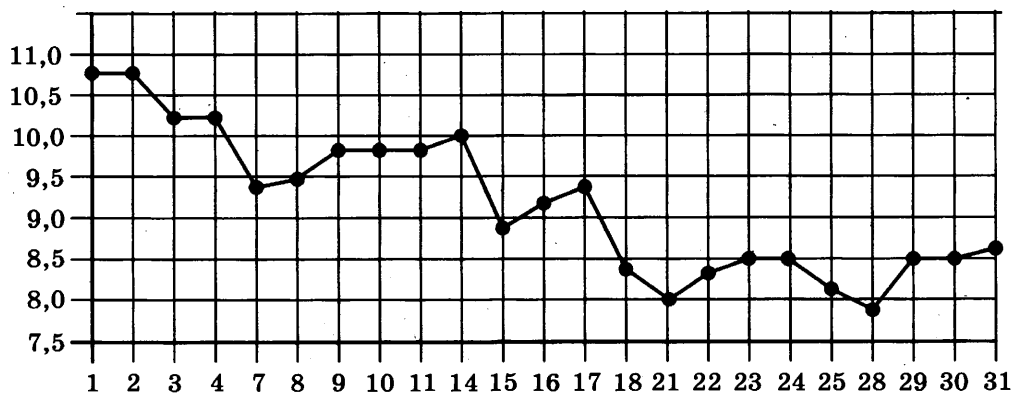
Часть 1

1

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

2

2. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.

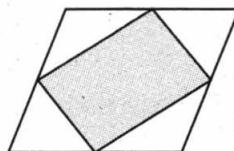


3

3. Для группы иностранных гостей требуется купить путеводители в количестве 10 шт. Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Условия покупки и доставки даны в таблице. Определите, в каком из магазинов общая сумма покупки с учётом доставки будет наименьшей. В ответе напишите наименьшую сумму в рублях.

Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Доп. условия
А	394	300	Нет
Б	396	250	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 3500 р.
В	398	200	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 4000 р.

4. Площадь параллелограмма равна 14. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.


 4

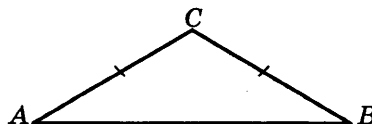
5. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.

 5

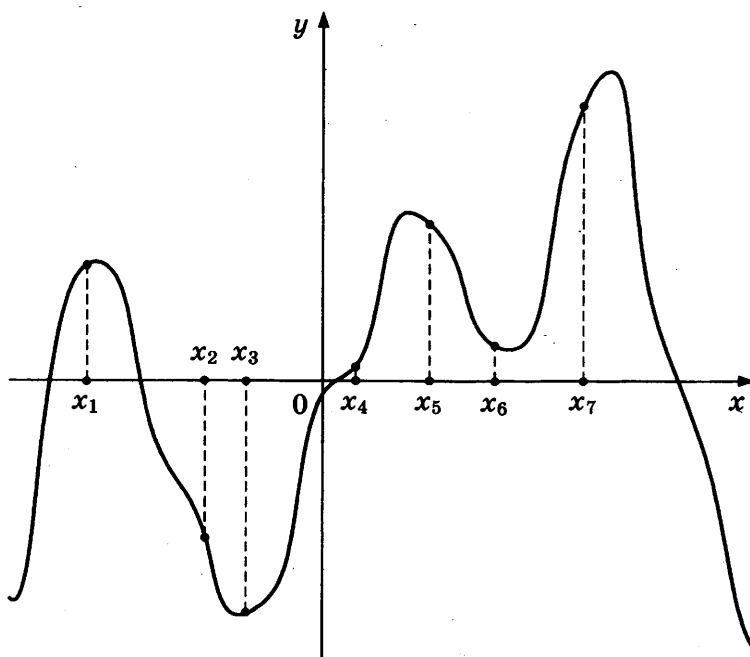
6. Найдите корень уравнения $\sqrt{14 + 5x} = 7$.

 6

7. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = \sqrt{3}$. Найдите AC .

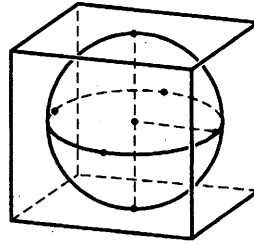

 7

8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ — производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?

 8


9

9. Шар, объём которого равен 42π , вписан в куб. Найдите объём куба.



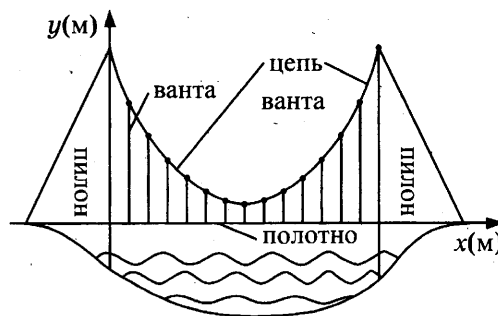
Часть 2

10

10. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.

11

11. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,0013x^2 - 0,35x + 27$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



12

12. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

13

13. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

14

14. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $5^{x^2-4x+1} + 5^{x^2-4x} = 30$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 3]$.

15

16. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 12.

а) Постройте прямую пересечения плоскости $BB_1 DD_1$ с плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

16

17. Решите неравенство $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0$.

17

18. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2} DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

18

19. 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Михаил переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

19

20. Найдите все значения параметра k , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 + (2 - 2k) \sin t}{\cos t - \sin t} = 2k$$

имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

20

21. Десятичная запись натурального числа n должна состоять из различных (не менее двух) цифр одной чётности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найдите все такие n .

21

ВАРИАНТ 5

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

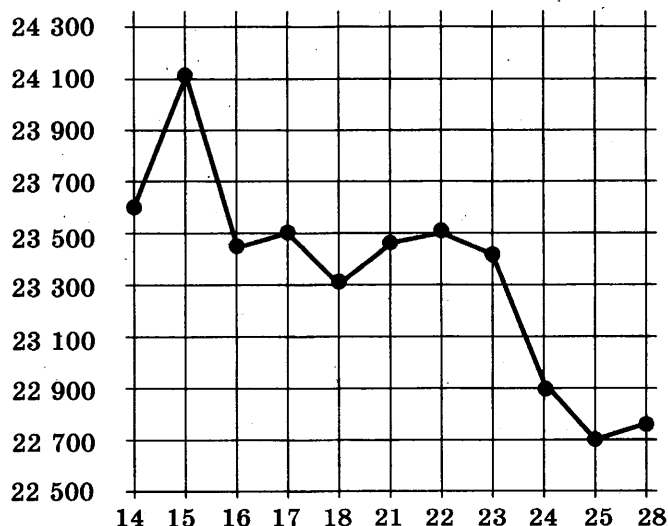
1

1. Каждый день во время конференции расходуется 120 пакетиков чая. Конференция длится 3 дня. Чай продаётся в пачках по 50 пакетиков. Сколько пачек нужно купить на все дни конференции?

2

2. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 14 по 28 июля 2008 года.

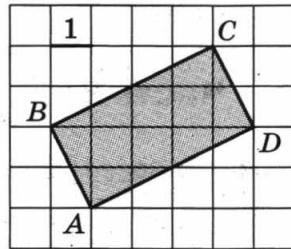
По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена олова на момент закрытия торгов была наименьшей за данный период.



3. Чтобы связать свитер, хозяйке нужно 900 граммов шерсти синего цвета. Можно купить синюю пряжу по цене 70 рублей за 100 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 100 г и окрасить её. Один пакетик краски стоит 40 рублей и рассчитан на окраску 300 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответ напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.

 3

4. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$.


 4

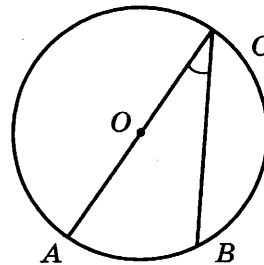
5. Марина и Дина бросают кубик по одному разу. Выигрывает та девочка, у которой выпадет больше очков. Первой кубик бросила Марина, у неё выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что Дина выигрывает.

 5

6. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

 6

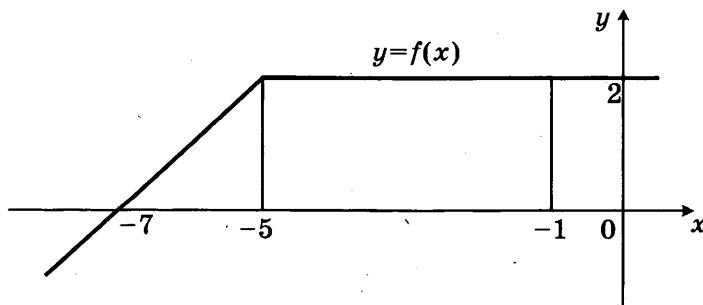
7. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $1/5$ окружности. Ответ дайте в градусах.


 7

8. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл

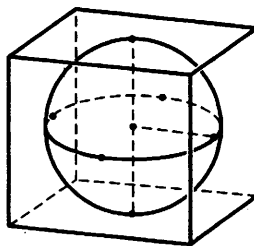
 8

$$\int_{-7}^{-1} f(x) dx.$$



9

9. Шар, объём которого равен 21π , вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

10

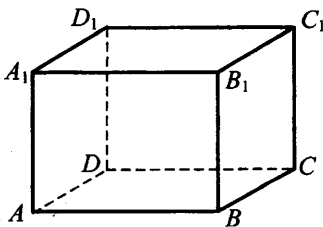
10. Найдите значение выражения $\log_6 126 - \log_6 3,5$.

11

11. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 900$ К, $a = 31$ К/мин, $b = -0,2$ К/мин². Известно, что при температурах нагревателя свыше 1550 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

12

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 32$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины C , C_1 и A .



13

13. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

13

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 11 \operatorname{tg} x - 11x + 16$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
16. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC . Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.
 а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.
 б) Найдите площадь поверхности пирамиды.
17. Решите неравенство $\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24+2x-x^2}{14} > 1$.
18. На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .
 а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.
 б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?
19. 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Пётр переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?
20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.
21. Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a - K^3$ делится без остатка на $27 - K$. Найдите a .

15

16

17

18

19

20

21

ВАРИАНТ 6

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

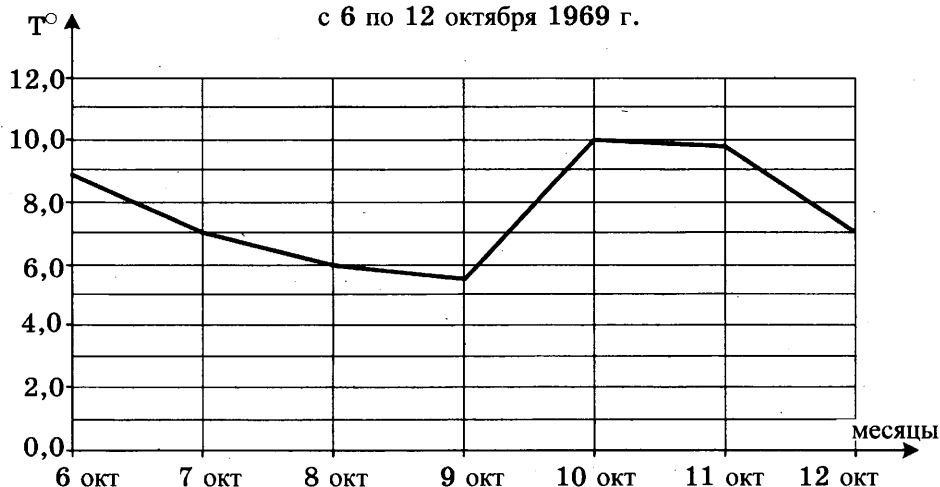
1

1. Поезд Москва–Ижевск отправляется в 17:41, а прибывает в 10:41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2

2. На рисунке изображен график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове
с 6 по 12 октября 1969 г.

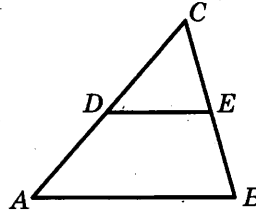


3

3. В магазине одежды объявлена акция — если покупатель приобретает товар на сумму свыше 5000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель В. хочет приобрести куртку ценой 4500 руб., рубашку ценой 800 руб. и кеды ценой 1600 руб. В каком случае В. заплатит за покупку меньше всего?

1. В. купит все три товара сразу.
 2. В. купит сначала куртку и рубашку, а потом кеды со скидкой.
 3. В. купит сначала куртку и кеды, а потом рубашку со скидкой.
- В ответ запишите сумму (в рублях), которую заплатит В. за покупку в этом случае.

4. В треугольнике ABC DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 24. Найдите площадь треугольника ABC .


 4

5. В каждой пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Галя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Галя не найдёт приз в своей банке.

 5

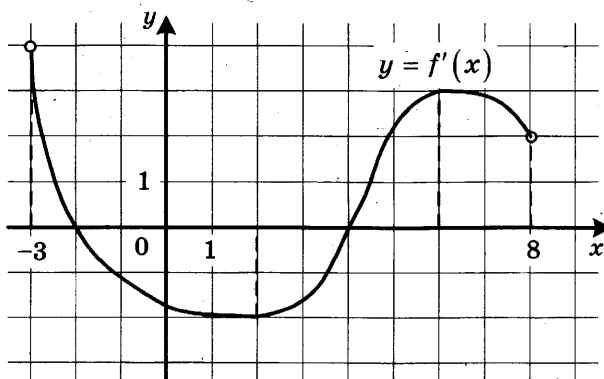
6. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{7x-49}} = \frac{1}{7}$.

 6

7. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56° . Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

 7

8. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.

 8


9. В цилиндрический сосуд, в котором находится 4 литра воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объём детали? Ответ выразите в литрах.

 9

Часть 2

10

10. Найдите значение выражения $\frac{4 \sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$.

11

11. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 210 тыс. руб.

12

12. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна 9, а высота боковой грани пирамиды, проведенная к ребру основания, равна $\sqrt{73}$. Найдите боковое ребро пирамиды.

13

13. Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 7$ на отрезке $[0; 2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. Решите уравнение $\frac{3 \operatorname{ctg}^2 x + 4 \operatorname{ctg} x}{5 \cos^2 x - 4 \cos x} = 0$.

16

16. В пирамиде $SABC$ известны длины ребер: $AB = AC = SB = SC = 10$, $BC = SA = 12$.
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.
б) Найдите расстояние между прямыми SA и BC .

17

17. Решите систему неравенств $\log_{|x|}^2(x^2) + \log_2(x^2) \leq 8$.

18. На отрезке BD взята точка C . Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD .

18

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos \angle ABC = \frac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB ?

19. Семён хочет взять в кредит 1,3 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Семён взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320 тысяч рублей?

19

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 + 3a = 6x$$

не имеет корней.

20

21. Найдите все такие натуральные n , что при вычеркивании первой цифры у числа 4^n снова получается число, являющееся натуральной степенью числа 4.

21

ВАРИАНТ 7

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

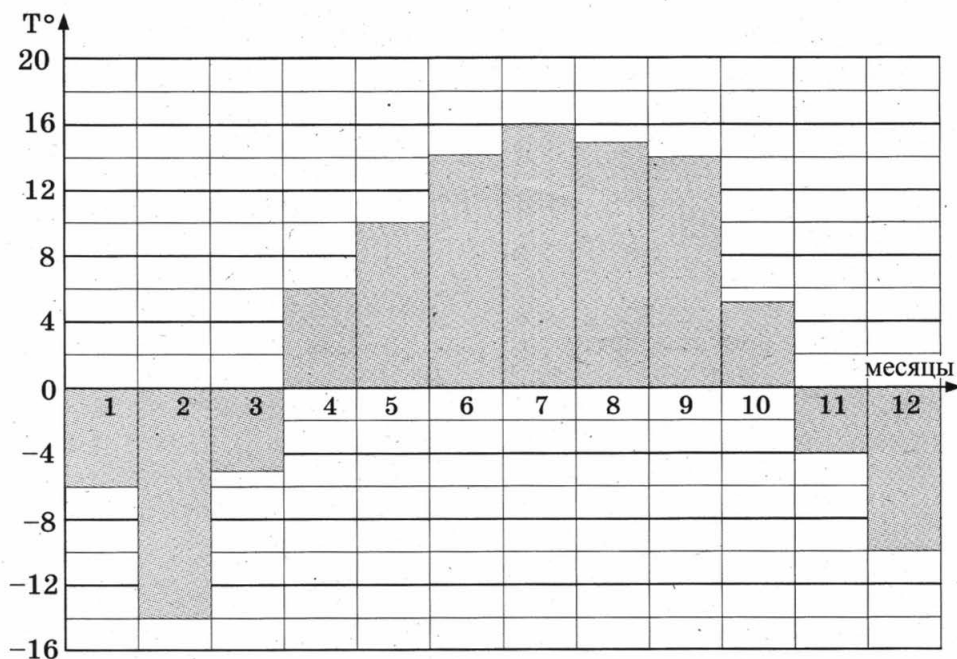
Часть 1

1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 руб. До установки счётчиков Александр платил за водоснабжение ежемесячно 900 руб. После установки счётчиков оказалось, что в среднем за месяц он расходует воды на 400 руб. За сколько месяцев установка счётчиков окупится?

2

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность средних температур самого тёплого и самого холодного месяца в 1994 году в Нижнем Новгороде. Ответ дайте в градусах Цельсия.

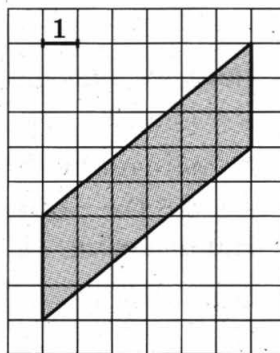


3. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает скидку на следующую покупку в размере 10%. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель Б. хочет приобрести куртку ценой 9600 руб., жилет ценой 720 руб. и перчатки ценой 820 руб. В каком случае Б. заплатит за покупку меньше всего?

 3

1. Б. купит все три товара сразу.
 2. Б. купит сначала куртку и жилет, а потом перчатки со скидкой.
 3. Б. купит сначала куртку и перчатки, а потом жилет со скидкой.
- В ответ запишите, сколько рублей заплатит Б. за покупку в этом случае.

4. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.


 4

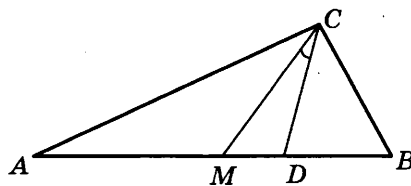
5. В группе туристов 10 человек, в том числе турист А. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Какова вероятность того, что туристу А. выпадет по жребию пойти в село?

 5

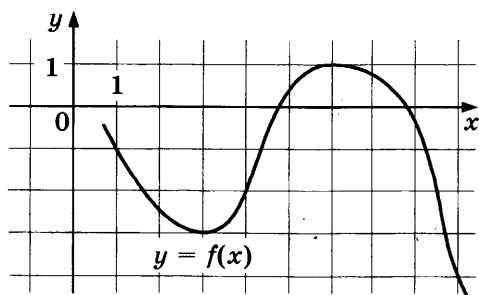
6. Найдите корень уравнения $\log_3(-5 - x) = 1$.

 6

7. Острые углы прямоугольного треугольника равны 63° и 27° . Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

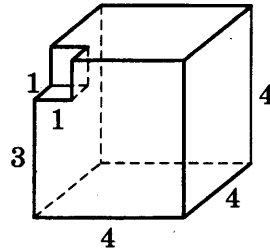

 7

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[1; 9]$.

 8


9

9. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

10

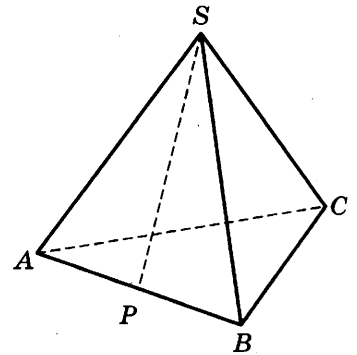
10. Найдите значение выражения $-50 \operatorname{tg} 27^\circ \cdot \operatorname{tg} 117^\circ$.

11

11. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 155$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В? Ответ выразите в омах.

12

12. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB , S — вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка BC .



13

13. Из точки A в точку B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 7 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

14

14. В какой точке x_0 функция $y = \sqrt{3 - 3x - 2x^2}$ принимает наибольшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)} = 1$.

15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

16

- а) Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна, плоскости $A_1 B C_1$.
 б) Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

17. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$.

17

18. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

18

- а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
 б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

19. 1 января 2015 года Олег Владимирович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 3 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 3%), затем Олег Владимирович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Олег Владимирович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

20

$\frac{a - (a^2 - 2a - 3)\sin x + 4}{1,5 + 0,5 \cos 2x + a^2} < 1$ содержит

отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$.

21. Найдите все такие целые a и b , что корни уравнения

21

$$x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5 = 0$$

являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ — простыми числами.

ВАРИАНТ 8

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

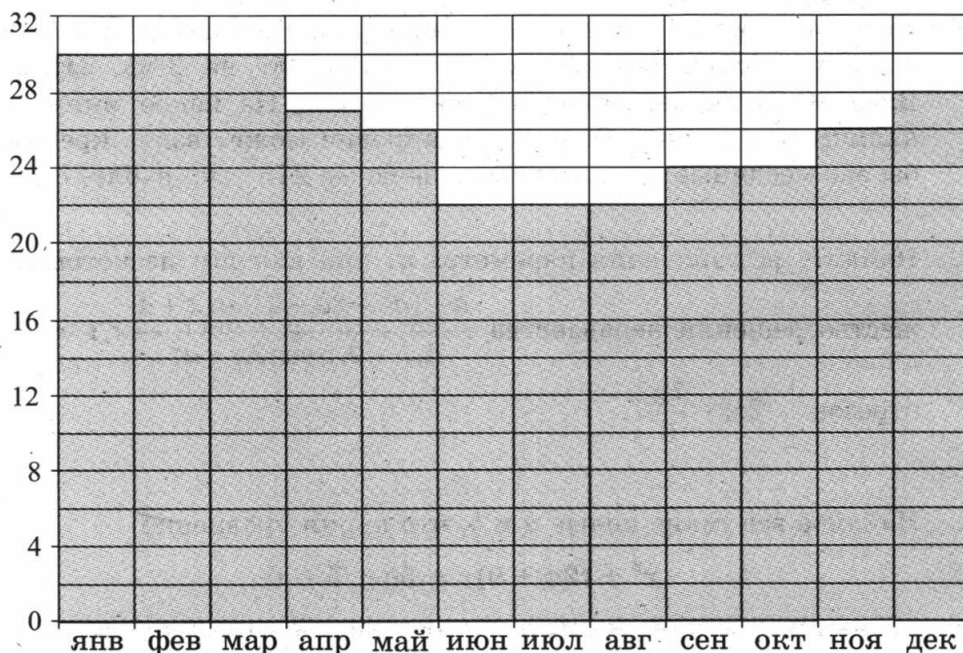
Часть 1

1

1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 11% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 5 кг в течение суток?

2

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Рио-де-Жанейро за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячной температурой в 2009 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



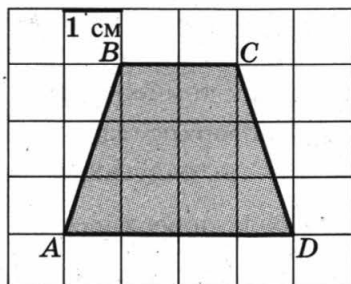
3. Рейтинговое агентство определяет рейтинги автомобилей на основе оценок безопасности S , комфорта C , функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый показатель оценивается читателями журнала по 5-балльной шкале. Рейтинг R вычисляется по формуле:

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}$$

В таблице даны оценки каждого показателя для трёх моделей автомобилей. Определите, какой автомобиль имеет наивысший рейтинг. В ответ запишите значение этого рейтинга.

Модель автомобиля	Безопасность	Комфорт	Функциональность	Качество	Дизайн
А	3	3	5	5	3
Б	4	5	3	4	3
В	4	4	3	3	4

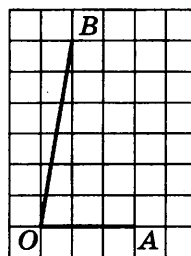
4. Найдите площадь трапеции $ABCD$. Размер каждой клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



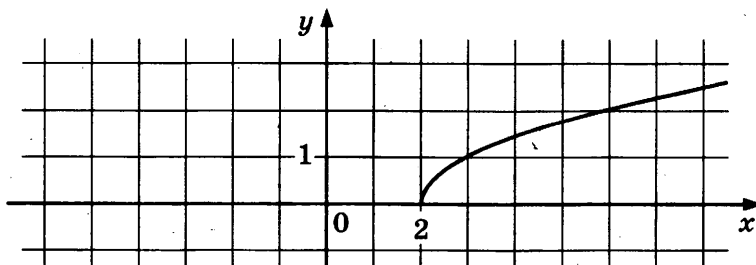
5. В среднем из 1800 садовых насосов, поступивших в продажу, 18 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

6. Найдите корень уравнения $2^{\log_{16}(9x+4)} = 5$.

7. Найдите тангенс угла AOB , изображённого на клетчатой бумаге.



8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



3

4

5

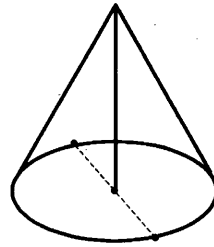
6

7

8

9

9. Высота конуса равна 30, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.



Часть 2

10

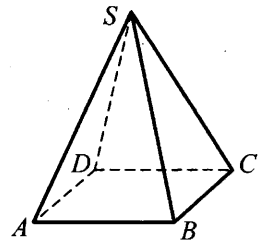
10. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.

11

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $4,104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

12

12. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ боковое ребро SC равно 17, сторона основания равна $15\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.



13

13. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

14

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

15

16. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 7$.

16

- а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и перпендикулярной ему.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1 .

17. Решите неравенство $9^{x-2} - 37 \cdot 3^{x-3} + 30 \leq 0$.

17

18. В параллелограмм вписана окружность.

18

- а) Докажите, что этот параллелограмм – ромб.
б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

19. 31 декабря 2014 года Геннадий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Геннадий переводит очередной транш. Геннадий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 600 тыс. рублей, во второй 55 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Геннадию?

19

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\log_{0,5}(x^2) - a| - |\log_{0,5} x + 2a| = (\log_{0,5} x)^2$ имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

20

21. Друг за другом подряд выписали десятичную запись чисел 2^{50} и 5^{50} . Сколько всего цифр выписали?

21

ВАРИАНТ 9

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

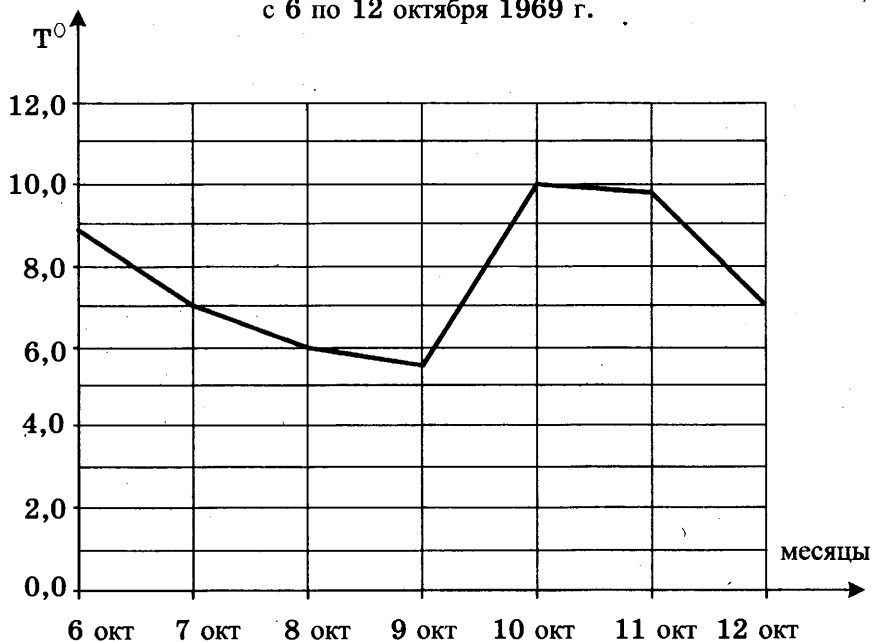
1

1. 1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 руб. 80 коп. 1 ноября счётчик электроэнергии показывал: 12 625 киловатт-часов, а 1 декабря — 12 802 киловатт-часа. Сколько рублей нужно заплатить хозяину квартиры за электроэнергию за ноябрь?

2

2. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Среднесуточная температура в Саратове
с 6 по 12 октября 1969 г.

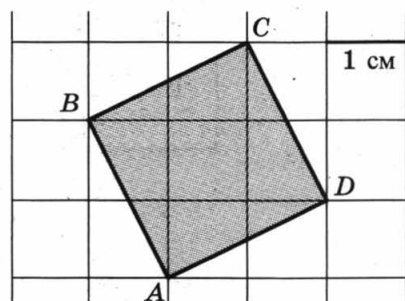


3. Строительной фирме нужно приобрести 60 кубометров пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость (в рублях) покупки с доставкой, если цены на пеноблоки и условия доставки приведены в таблице?

 3

Поставщик	Цена пеноблоков (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные предложения и скидки
А	2700	7000	При заказе на сумму больше 200 000 руб. доставка бесплатно
Б	2800	5700	При заказе на сумму больше 150 000 руб. доставка бесплатно
В	2750	3000	

4. Найдите площадь квадрата $ABCD$. Размер каждой клетки 1 см \times 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

 4


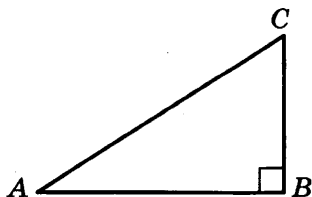
5. В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,4. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

 5

6. Решите уравнение $3^{x-3} = 27$.

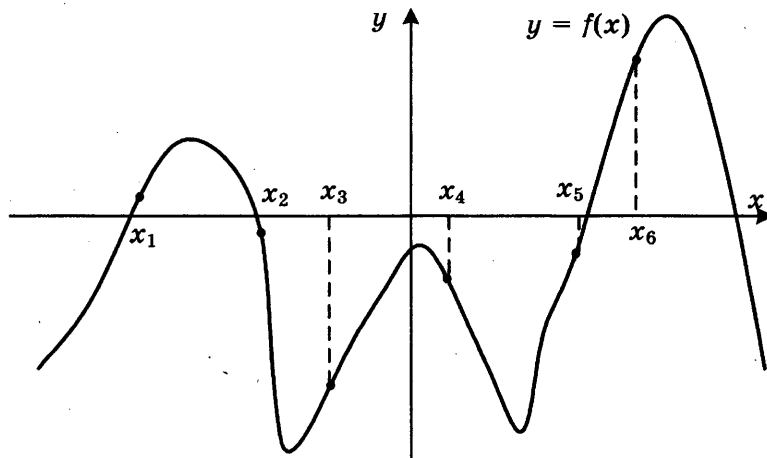
 6

7. Один острый угол прямоугольного треугольника на 30° больше другого. Найдите больший острый угол.

 7


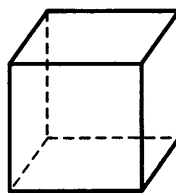
8

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



9

9. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в семь раз?



Часть 2

10

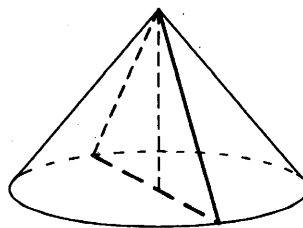
10. Найдите значение выражения $\log_2 7 \cdot \log_7 4$.

11

11. В электросеть включён предохранитель, рассчитанный на силу тока 16 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора. (Ответ выразите в омах.)

12

12. Высота конуса равна 21, а длина образующей — 29. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



13. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

 13

14. Найдите наибольшее значение функции

$$y = x^3 - 18x^2 + 81x + 73$$

на отрезке $[0; 7]$.

 14

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15. а) Решите уравнение $5 \cos^2 x - 12 \cos x + 4 = 0$.

 15

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

16. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

 16

а) Постройте прямую пересечения плоскости BB_1DD_1 с плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

17. Решите неравенство $\log_{x-3}(x^2 - 12x + 36) \leq 0$.

 17

18. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

 18

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

19

19. 31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Максим переводит очередной транш. Если бы он будет платить каждый год по 1 640 250 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 2 936 250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Максим взял деньги в банке?

20

20. Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a + x^2 + 2 \log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

21

21. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

- а) пять;
- б) четыре;
- в) три

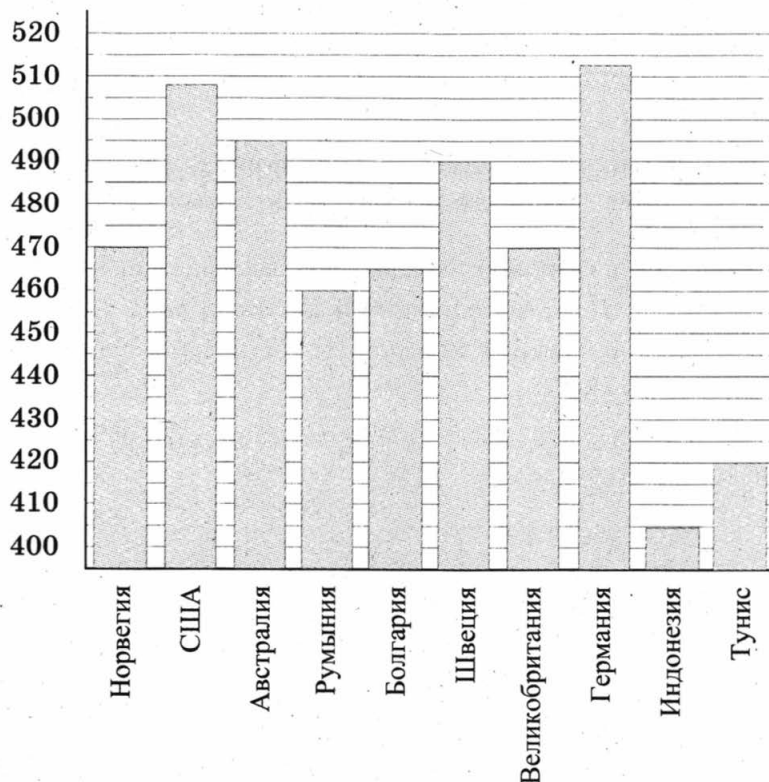
из них образуют геометрическую прогрессию?

ВАРИАНТ 10

Ответом к заданиям 1–14 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1.

1. Цена на принтер была понижена на 20% и составила 4800 рублей. Сколько рублей стоил принтер до понижения цены?
2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран третье место принадлежит Австралии. Определите, какое место занимает Тунис.

 1 2

3

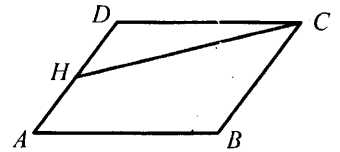
3. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата (в месяц)	Плата за 1 минуту разговора
«Повременный»	Нет	0,35 руб.
«Комбинированный»	140 руб. за 350 мин.	0,3 руб. (сверх 350 мин. в месяц)
«Безлимитный»	200 руб.	—

Абонент выбрал самый дешёвый тарифный план исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 700 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 700 минутам? Ответ дайте в рублях.

4

4. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $AHCB$.



5

5. По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,94. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

6

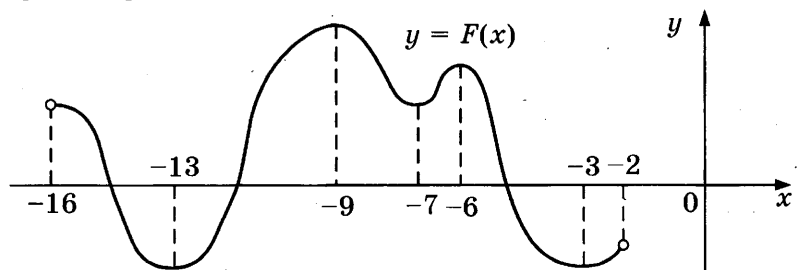
6. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{36}\right)^{x-2} = 6$.

7

7. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21° , угол CAD равен 30° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.

8

8. На рисунке изображён график первообразной $y = F(x)$ некоторой функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-16; -2)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-15; -8]$.



9

9. Объём данной правильной треугольной призмы равен 80. Найдите объём правильной треугольной призмы, ребро основания которой в 4 раза меньше ребра основания данной призмы, а высота в 4 раза больше высоты данной призмы.

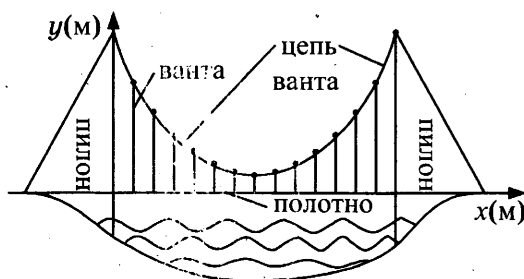
Часть 2

10. Найдите значение выражения $\frac{18}{3^{\log_3 2}}$.

	10
--	-----------

11. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,0021x^2 - 0,47x + 31$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.

	11
--	-----------



12. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше её высоты. Найдите угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания пирамиды. Ответ дайте в градусах.

	12
--	-----------

13. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

	13
--	-----------

14. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

	14
--	-----------

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 15–21 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (15, 16 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

15

15. а) Решите уравнение $\cos 4x - \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

16

16. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости $AD_1 C_1$.

б) Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.

17

17. Решите неравенство $x^3 + 5x^2 + \frac{28x^2 + 5x - 30}{x - 6} \leq 5$.

18

18. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM : MB = 3 : 1$. Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = 2\sqrt{2}$.

19

19. 31 декабря 2014 года Павел взял в банке 8 599 000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14%), затем Павел переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Павел выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

20

20. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (4a - 2x)^3 + 6x^2 + 8a = 4x$$

не имеет корней.

21

21. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки?

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10980	4000000	622	2,25	0,999	5	0,6	3	175	2	7	5,5	3	16

15	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{2}$
16	2
17	$[2; +\infty)$
18	3
19	2 296 350
20	$a \geq 1$
21	Да

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	2	1160	8	0,14	9	40	4	2	14	5,5	120	6	6

15	а) $1 \pm \sqrt{3}$; б) $1 - \sqrt{3}$
16	$\frac{\sqrt{5}}{5}$
17	$(4; 8]$
18	1:3
19	9
20	$-2 \leq k < \sqrt{2} - 2$ или $\sqrt{2} - 2 < k \leq 0$
21	а) нет, б) да (225, 3375, 225), в) 479.

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
42	28	11060	16	0,6	-3	24	0,25	96	20	5	8	48	17

15	а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $-\arctg 3 + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi - \arctg 3$; $\frac{9\pi}{4}$
16	$\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$
17	$[1; \log_2 5]$
18	1:6
19	20
20	$-24 < a < 18$
21	а) нет, б) нет, в) да.

Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
63	28	3960	7	0,505	7	1	5	252	-0,75	17,67	84	21	-2
15	а) $2 \pm \sqrt{5}$; б) $2 - \sqrt{5}$												
16	0,5												
17	$(-\infty; 2], [3; +\infty)$												
18	19												
19	6 409 000												
20	$\frac{1}{2} < k < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ или $k > \frac{2+\sqrt{2}}{2}$												
21	64 и 6084												

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	25	630	10	0,5	2	36	10	126	2	25	160	6	16
15	а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$												
16	192												
17	$(-4; -3), (-1; 3)$												
18	4 : 21												
19	20												
20	$a = 2$												
21	$a = 27^3$												

Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
17	6	6740	96	0,8	42	34	4	2	2	7	10	10	-2
15	$x = \pi - \operatorname{arccotg} \frac{4}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$												
16	$2\sqrt{7}$												
17	$[-4; -1), (-1, 0), (0, 1), (1; 4]$												
18	9 : 7												
19	6												
20	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$												
21	3												

Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	30	11058	18	0,2	-8	18	-4	63	50	15	4	63	-0,75
15	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$												
16	$\frac{\pi}{3}$												
17	$(-2; -1] \cup (1; 2)$												
18	$\frac{17 - 4\sqrt{13}}{3}$												
19	5												
20	$a < \frac{3 - \sqrt{57}}{4}; a > \frac{3 + \sqrt{57}}{4}$												
21	$a = -3, b = -1$												

Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	8	0,78	9	0,99	69	6	0,25	32	0,75	6000	1200	9	9
15	а) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos \frac{1}{6}, -2\pi + \arccos \frac{1}{6}$												
16	$\frac{12}{7}$												
17	$[\log_3 30; 4]$												
18	$\frac{24}{5}\sqrt{6}$												
19	10												
20	$-\frac{9}{4} < a < 2$												
21	51												

Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
318,6	6	168000	5	0,4	6	60	2	343	2	13,75	420	40	181
15	а) $\pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos \frac{2}{5}, -2\pi + \arccos \frac{2}{5}$												
16	1,2												
17	$(3; 4), [5; 6), (6; 7]$												
18	$\frac{11 - 2\sqrt{10}}{3}$												
19	12,5												
20	$x = 0$ при $a = 4$												
21	а) нет; б) нет; в) да												

Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6000	9	200	2,25	0,012	1,5	99	2	20	9	8,39	45	30	9

15	a) $\frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$
16	$\frac{\pi}{3}$
17	$(-\infty; -1], 0, [2; 6)$
18	$2\sqrt{7}$
19	3 703 860
20	$\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$
21	а) 36; б) 72; в) 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

Часть 2

15. а) Решите уравнение $(49^{\cos x})^{\sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

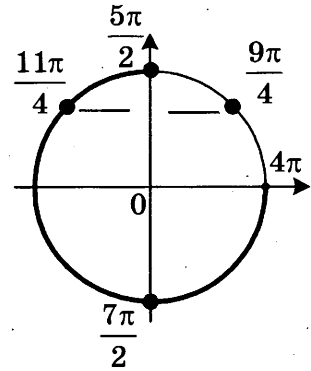
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7^{2 \cos x \sin x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}; \quad 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x; \quad \cos x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0; \quad \cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберем корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.



Получаем: $\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}$.

16. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC , точка O — центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

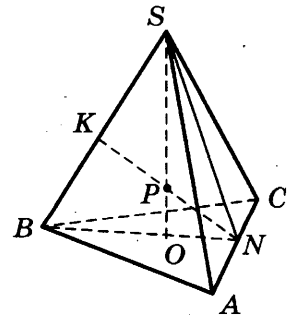
а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS .

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP .

Решение:

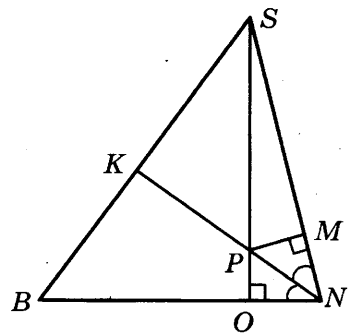
а) Точка O принадлежит отрезку BN , значит точка P , лежащая на отрезке SO , находится в плоскости SBN . Поэтому прямая PN содержится в плоскости SBN и пересекает SB в точке K .

$\triangle SNB$ равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC . Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$.



Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN . Пусть он пересекает SN в точке M . Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$.

Значит, $PM = \frac{1}{3}SP = PO$. Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB . В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK \perp BS$.



б) Так как BS перпендикулярно NK , то искомое расстояние равно длине отрезка BK . Так как NK является медианой треугольника SNB , то $BK = \frac{1}{2}BS = 2$.

Ответ: 2.

17. Решите неравенство $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10 \right)$.

Решение.

Сделаем замену $a = \frac{1}{x}$, $b = x^2 + 3x - 9$.

Неравенство принимает вид

$$\log_3 a + \log_3 b \leq \log_3 (a + b - 1);$$

$$\begin{cases} \log_3 ab \leq \log_3 (a + b - 1), \\ a > 0, \\ b > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} ab \leq a + b - 1, \\ a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

В первом из полученных неравенств перенесём все члены в левую часть и разложим её на множители: $(a - 1)(b - 1) \leq 0$.

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) (x^2 + 3x - 10) \leq 0, \\ \frac{1}{x} > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)(x^2 + 3x - 10) \geq 0, \\ x > 0, \\ x^2 + 3x - 9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1)(x + 5)(x - 2) \geq 0, \\ x > 0, \\ \left(x + \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \right) \left(x + \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \right) > 0. \end{cases}$$

При условии $x > 0$ из первого неравенства получаем: $0 < x \leq 1$ или $x \geq 2$.

А из второго неравенства находим: $x > \frac{3\sqrt{5} - 3}{2}$.

Так как $\frac{3\sqrt{5} - 3}{2} > 1$, решением всей системы является промежуток $[2; +\infty)$.

Ответ: $[2; +\infty)$.

18. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Решение:

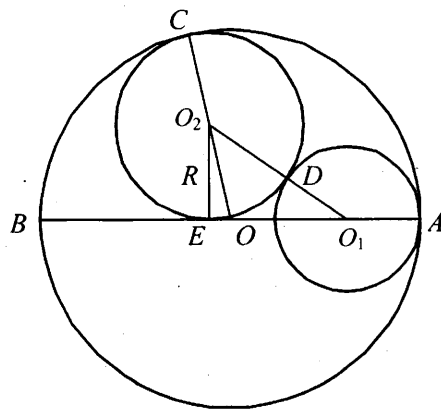
а) Пусть AB — диаметр большей из трёх окружностей, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r , касающейся окружности с диаметром AB в точке A , O_2 — центр окружности радиуса R , касающейся окружности с диаметром AB в точке C , окружности с центром O_1 — в точке D , отрезка AB — в точке E .

Точки O , O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$. Аналогично

$OO_1 = OA - O_1A = OA - r$ и $O_1O_2 = O_1D + O_2D = r + R$.

Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R = OA + OC = 2OA = AB.$$



б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда

$$O_2E = R, O_1O_2 = 2 + R, OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4, OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$$

Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2 + R)^2 - R^2} = \sqrt{4 + 4R},$$

$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6 - R)^2 - R^2} = \sqrt{36 - 12R},$$

а так как $O_1E = OO_1 + OE$, то $\sqrt{4 + 4R} = 4 + \sqrt{36 - 12R}$. Из этого уравнения находим, что $R = 3$ (это значит, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, то есть точка E совпадает с O).

Ответ: 3.

19. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение:

Пусть сумма кредита равна S , а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1 + b + b^2 + b^3)X = Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sb^4 - \frac{b^4 - 1}{b - 1} \cdot X = 0, \text{ откуда } X = \frac{Sb^4(b - 1)}{b^4 - 1}.$$

При $S = 6\,902\,000$ и $a = 12,5$, получаем: $b = 1,125$ и

$$X = \frac{6\,902\,000 \cdot 1,601806640625 \cdot 0,125}{0,601806640625} = 2\,296\,350 \text{ (рублей).}$$

Ответ: 2 296 350.

20. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых любое число из отрезка $2 \leq x \leq 3$ является решением уравнения

$$|x - a - 2| + |x + a + 3| = 2a + 5.$$

Решение:

Если $2a + 5 < 0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a = -2,5$. Тогда уравнение имеет вид

$$|x + 0,5| + |x + 0,5| = 0,$$

и ни одно число из отрезка $[2, 3]$ не является его решением.

Пусть $a > -2,5$. Будем использовать геометрический подход и запишем уравнение в виде

$$x - (a + 2) + |x - (-a - 3)| = 2a + 5.$$

Заметим, что при $a > -2,5$ верно неравенство $-a - 3 < a + 2$. Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка $[-a - 3, a + 2]$: ведь длина этого отрезка равна $(a + 2) - (-a - 3) = 2a + 5$ и неравенству удовлетворяют те и только те точки x , сумма расстояний от каждой из которых до точек $x = a + 2$; $x = -a - 3$ равна $2a + 5$. Осталось выбрать те значения a , при каждом из которых отрезок $[-a - 3, a + 2]$ содержит отрезок $[2, 3]$. Это выполнено тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} -a - 3 \leq 2, \\ a + 2 \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -5, \\ a \geq 1; \end{cases} \quad a \geq 1.$$

Ответ: $a \geq 1$.

21. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящихся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

Решение:

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, делится на 11.

Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5. Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, становится равной 11. Меняя местами, например, 4 и 7, или 3 и 6, получаем требуемые примеры.

Примечание. В задаче не требуется нахождение всех чисел, обладающих указанным свойством.

Ответ: Да.

